



Jan Acedański

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Ekonomii
Katedra Metod Statystyczno-Matematycznych w Ekonomii
jan.acedanski@ue.katowice.pl

RACJONALNE OCZEKIWANIA A ADAPTACYJNE UCZENIE SIĘ W MODELACH DSGE Z NIEJEDNORODNYMI PODMIOTAMI*

Streszczenie: W pracy rozważany jest standardowy model DSGE z niejednorodnymi konsumentami, ograniczeniami w zaciąganiu długów oraz globalnym ryzykiem, w którym założenie o racjonalnych oczekiwaniach w odniesieniu do równania ruchu zagregowanego kapitału zastąpiono mechanizmem adaptacyjnego uczenia się podmiotów. Zakładając jednorodność oczekiwań konsumentów, analizowana jest zbieżność procesu uczenia się do racjonalnych oczekiwań oraz wpływ uczenia się konsumentów na rozkład majątku w modelu. Badania symulacyjne wskazują, że przy dowolnych dopuszczalnych wartościach początkowych parametrów proces uczenia się dąży do racjonalnych oczekiwań. Powoduje on także tymczasowe, umiarkowane zmiany przeciętnego poziomu kapitału w modelu oraz niewielkie, ale trwałe zmiany jego zróżnicowania mierzonego współczynnikiem Giniego.

Słowa kluczowe: racjonalne oczekiwania, adaptacyjne uczenie się, niejednorodne podmioty.

Wprowadzenie

Stochastyczne, dynamiczne modele równowagi ogólnej (DSGE) są jednym z podstawowych narzędzi stosowanych we współczesnej makroekonomii [zob. Wickens, 2008; Grabek, Kłos, Koloch, 2010; Acedański 2009]. U podstaw tych modeli leży metodologiczne założenie, iż równania opisujące dynamikę podstawowych agregatów makroekonomicznych powinny być wyprowadzane z mikroekonomicznych podstaw optymalnego zachowania się pojedynczych podmiotów.

* Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2011/01/D/HS4/03430.

Dodatkowo w omawianych modelach stosuje się jeszcze dwa ważne założenia: o istnieniu reprezentatywnych podmiotów oraz o ich racjonalnych oczekiwaniach. Według pierwszej koncepcji efekty decyzji wielu, niekoniecznie jednorodnych, podmiotów są tożsame z efektami decyzji jednego, reprezentatywnego podmiotu. Uzasadnieniem powyższego założenia jest drugie twierdzenie ekonomii dobrobytu. Natomiast zgodnie z założeniem o racjonalnych oczekiwaniach w ramach danego modelu ekonomicznego istnieje zgodność w procesie decyzyjnym pomiędzy sposobem formułowania oczekiwań przez podmioty odnośnie do interesujących ich zmiennych a faktyczną dynamiką tych zmiennych. Innymi słowy, zakłada się, że podmioty znają dokładnie równania opisujące dynamikę wybranych zmiennych.

Oba założenia są często krytykowane, przede wszystkim mając na uwadze ich nierealistyczność. Jako alternatywę dla modeli z reprezentatywnymi podmiotami stosowane są modele, w których jednostki trwale różnią się, najczęściej ze względu na posiadane zasoby, charakterystyki lub sposób podejmowania decyzji. Przykładowo w pracy rozważany jest model z niejednorodnymi konsumentami zaproponowany przez Krusella i Smitha [1998]. W modelu tym uwzględnia się niejednorodność konsumentów, którzy różnią się ze względu na posiadany majątek oraz status na rynku pracy. Z kolei jedną z alternatyw dla racjonalnych oczekiwań, rozpatrywaną w tej pracy, jest koncepcja adaptacyjnego uczenia się podmiotów [zob. Evans, Honkapohja, 2001]. Zakłada się w niej, że podmioty nie znają właściwych równań opisujących dynamikę interesujących ich zmiennych, ale szacują parametry tych równań na podstawie przeszłych obserwacji.

Celem pracy jest przebadanie skutków zastąpienia założenia o racjonalnych oczekiwaniach założeniem o adaptacyjnym uczeniu się konsumentów w standardowym modelu DSGE z niejednorodnymi podmiotami zaproponowanym przez Krusella i Smitha [1998]. W pracy postawiono dwa podstawowe pytania badawcze:

- Czy równania prognostyczne przy adaptacyjnym uczeniu się podmiotów są zbieżne do równań uzyskanych dla racjonalnych oczekiwań?
- Czy zastąpienie racjonalnych oczekiwań adaptacyjnym uczeniem się wpływa na wnioski wypływające z modelu odnośnie do rozkładu majątku?

Oba pytania są ważne z punktu widzenia możliwości stosowania w badaniach ekonomicznych omawianego modelu w wersji z racjonalnymi oczekiwaniami. W sytuacji braku zbieżności procesu uczenia się do racjonalnych oczekiwań trudno byłoby uzasadnić stosowanie założenia o racjonalnych oczekiwaniach, gdyż nie wiadomo, w jaki sposób miałyby one powstać. Również w przypadku różnic we wnioskach odnośnie do rozkładu majątku wnioski uzyskane z modelu z racjonalnymi oczekiwaniami byłyby podatne na krytykę, gdyż niewielkie odstępstwa od tego założenia mogłyby skutkować zmianą wniosków. Tak więc jedynie po-

zytywna odpowiedź na pierwsze pytanie oraz negatywna na drugie uzasadnia stosowanie założenia o racjonalnych oczekiwaniach w omawianym modelu.

Artykuł składa się z trzech części. W pierwszej pokrótce omówiono model Krusella i Smitha. Następnie opisano założenia o racjonalnych oczekiwaniach oraz adaptacyjnym uczeniu się podmiotów w kontekście badanego modelu. Wreszcie w trzeciej części przedstawiono wyniki badań symulacyjnych.

1. Model Krusella i Smitha z niejednorodnymi podmiotami i zagregowanym ryzykiem

W pracy rozważany jest model w wersji opracowanej przez den Haana, Judda i Juillarda [2009], który różni się od oryginału Krusella i Smitha [1998] tylko w jednym aspekcie. Zakłada się, że osoby bezrobotne otrzymują zasiłek, który jest finansowany przez rząd z podatków obciążających pracę. W pierwotnej wersji modelu osoby bezrobotne nie otrzymywały żadnego wynagrodzenia.

Przy opisie modelu stosowane są następujące oznaczenia. Dużymi literami oznaczono wielkości zagregowane mierzone per capita. Małe litery dotyczą zmiennych odnoszących się do pojedynczych jednostek. Mając na uwadze czytelność wzorów, zrezygnowano ze stosowania subskryptów identyfikujących poszczególne podmioty, jak również momenty czasu. Zmienne bez żadnych oznaczeń odnoszą się więc do momentu t , a primem oznaczono zmienne w okresie $t + 1$.

W modelu występuje reprezentatywne przedsiębiorstwo, które wytwarza jeden wyrób Y , korzystając z dwóch czynników produkcji: kapitału K oraz pracy, której nakład wynosi $L\bar{l}$, gdzie L oznacza odsetek konsumentów pracujących w całej populacji, natomiast \bar{l} jest czasem poświęcanym na pracę przez jednostkę. W omawianym modelu \bar{l} jest stałe i identyczne dla wszystkich konsumentów. Przedsiębiorstwo stosuje standardową technologię opisywaną funkcją produkcji Cobba–Douglasa:

$$Y = ZK^\alpha (L\bar{l})^{1-\alpha}, \quad (1)$$

przy czym Z oznacza stochastyczny szok produktywności. Zmienna losowa Z może przyjąć dwie wartości: Z_b (recesja) oraz Z_g (boom). Jej dynamika opisywana jest dwustanowym jednorodnym łańcuchem Markowa. Zakłada się, że kapitał oraz praca oferowane przez poszczególnych konsumentów są jednorodne. Rynek tych czynników jest doskonale konkurencyjny, więc stopa procentowa r oraz płaca w równe są odpowiednio:

$$r = \alpha Z K^\alpha \left(\frac{K}{L\bar{l}} \right)^{\alpha-1}, \quad (2)$$

$$w = (1 - \alpha) Z K^\alpha \left(\frac{K}{L\bar{l}} \right)^\alpha. \quad (3)$$

W modelu występuje również nieskończona liczba konsumentów, którzy różnią się ze względu na status na rynku pracy oraz zgromadzony majątek. Osoby pracujące dostarczają w każdym okresie \bar{l} jednostek pracy, za które otrzymują wynagrodzenie w wysokości $w\bar{l}$. Osoby bezrobotne otrzymują zasiłek równy $\mu w\bar{l}$, gdzie $0 < \mu < 1$.

Problem decyzyjny indywidualnego konsumenta w wersji z racjonalnymi oczekiwaniami można zapisać w formie równania Bellmana:

$$v(k, \varepsilon, Z, K) = \max_{c, k'} \{ \ln(c) + \beta E[v(k', \varepsilon', Z', K') | \varepsilon, Z] \}, \quad (4)$$

$$\text{p. w. } k' - (1 - \delta)k + c = [(1 - \tau)\varepsilon + \mu(1 - \varepsilon)]\bar{l}w + kr, \quad (5)$$

$$\ln K' = b_{0b} + b_{1b} \ln K, \quad \text{gdy } Z = Z_b, \quad (6)$$

$$\ln K' = b_{0g} + b_{1g} \ln K, \quad \text{gdy } Z = Z_g, \quad (7)$$

$$c, k' \geq 0, \quad (8)$$

gdzie: v – funkcja wartości, c – konsumpcja, k – zasób kapitału konsumenta, ε – status konsumenta na rynku pracy (1, jeżeli pracuje, oraz 0 dla osoby bezrobotnej), β – współczynnik dyskontowy, δ – stopa deprecjacji kapitału, τ – stawka podatkowa.

Równania (6)-(7) opisują przewidywania konsumentów odnośnie do przyszłego poziomu zagregowanego kapitału. Ich parametry dobierane są po ustaleniu wartości wszystkich innych parametrów modelu, przy zastosowaniu iteracyjnej procedury [zob. Krusell, Smith, 1998, s. 877-881] tak, aby oczekiwania konsumentów były jak najbliższe racjonalnym oczekiwaniom. Warunek (8) wyklucza możliwość zaciągania długów przez konsumentów. Dynamika zmiennej losowej ε opisywana jest dwustanowym niejednorodnym łańcuchem Markowa, w którym macierz przejścia zależy od stanu gospodarki Z .

Sektor rządowy uwzględnia się w modelu w bardzo ograniczonej formie. Jedynym jego celem jest finansowanie zasiłków dla bezrobotnych z podatków obciążających płace. Budżet sektora rządowego jest zbilansowany w każdym okresie, co oznacza, że musi być spełniony warunek:

$$\tau = \frac{\mu(1-L)}{L\bar{l}} \quad (9)$$

W podstawowej wersji pracy przyjęto takie same wartości poszczególnych parametrów, jak w pracy den Haana, Judda i Juillarda [2009]. Parametry dobierane były w taki sposób, aby odzwierciedlać charakterystyczne cechy gospodarki USA.

2. Adaptacyjne uczenie się podmiotów w modelu

Punktem wyjścia dla implementacji schematu adaptacyjnego uczenia się w omawianym modelu jest jego wersja (4)-(8) z parametrami $\mathbf{b} = [b_{0_b}, b_{0_g}, b_{1_b}, b_{1_g}]$ równania dynamiki zagregowanego kapitału wyznaczonymi zgodnie z algorytmem Krusella–Smitha. Teraz jednak zakłada się, że konsumenci nie znają właściwych wartości parametrów \mathbf{b} , ale szacują je na podstawie obserwowanej dynamiki zagregowanego kapitału. Korzystają więc z poprawnie wyspecyfikowanych dwóch modeli w zależności od wartości zaburzenia produktywności. W pracy przyjmuje się, że konsumenci są jednorodni ze względu na proces uczenia się, a więc, że w danym okresie cechują się takimi samymi ocenami parametrów \mathbf{b} .

Rozważane są dwa schematy rekurencyjnego szacowania parametrów: klasyczna metoda najmniejszych kwadratów oraz wykładniczo ważona metoda najmniejszych kwadratów [zob. Evans, Honkapohja, 2001]. W obu przypadkach proces aktualizacji oszacowań w danym okresie można zapisać jako:

$$\mathbf{S}_{i,t} = \mathbf{S}_{i,t-1} + g_t (\mathbf{x}_{i,t-1} \mathbf{x}'_{i,t-1} - \mathbf{S}_{i,t-1}), \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{i,t} = \hat{\mathbf{b}}_{i,t-1} + g_t \mathbf{S}_{i,t}^{-1} \mathbf{x}_{i,t-1} (y_{i,t} - \mathbf{x}'_{i,t-1} \hat{\mathbf{b}}_{i,t-1}), \quad (11)$$

$$\mathbf{S}_{i,0}, \hat{\mathbf{b}}_{i,0} - \text{dane},$$

gdzie: dla klasycznej MNK $g_t = t^{-1}$, natomiast przy wykładniczo ważonej MNK $g_t = g$, $0 < g < 1$. W powyższych wzorach $\hat{\mathbf{b}}_{i,t}$ oznacza oszacowania wektora parametrów \mathbf{b}_i w okresie t , gdzie i reprezentuje stan zaburzenia produktywności w okresie $t - 1$, $\mathbf{S}_{i,t}$ jest macierzą kowariancji tych oszacowań, $\mathbf{x}_{i,t} = [1 \ K_t - 1]'$

oznacza wektor wartości zmiennych objaśniających, natomiast $y_{i,t} = K_{i,t}$ reprezentuje zmienną objaśnianą. Obecność indeksu i wskazuje, że powyższe wzory stosowane są osobno w sytuacji, gdy $Z_{t-1} = Z_g$ oraz gdy $Z_{t-1} = Z_b$.

W przypadku klasycznej MNK wszystkie obserwacje otrzymują takie same wagi. W efekcie zmiany oszacowań w kolejnych okresach są coraz mniejsze i proces uczenia jest zbieżny punktowo. Tymczasem w odniesieniu do wykładniczo ważonej MNK ostatnia obserwacja otrzymuje wagę równą 1, natomiast obserwacje sprzed t okresów $(1 - g)^t$. W rezultacie od pewnego momentu zmiany oszacowań w kolejnych okresach są średnio rzecz biorąc stałe i oszacowania parametrów wahają się wokół pewnego poziomu przeciętnego.

W pracy wykorzystano dwa sposoby ustalania początkowych wartości $S_{i,0}$ oraz $\hat{\mathbf{b}}_{i,0}$. W pierwszym przypadku były one ustalane arbitralnie. W drugim natomiast symulowano realizacje zagregowanego kapitału w modelu z racjonalnymi oczekiwaniami, a następnie estymowano początkowe wartości biorąc pod uwagę pewną liczbę obserwacji z symulowanego szeregu.

W procesie rekurencyjnej estymacji parametrów uwzględniono mechanizm mający zapobiegać przyjęciu przez oszacowania wartości spoza określonego, sensownego przedziału (*projection facility*). Przyjęto bowiem, że wartości parametrów powinny spełniać warunki: $b_0 > 0$ oraz $0 < b_1 < 1$. Jeżeli w danym okresie warunki te nie byłyby spełnione, oszacowania nie były aktualizowane.

Procedura symulacji modelu z adaptacyjnym uczeniem się podmiotów składała się więc z następujących kroków:

Krok 1: Przyjęcie startowych wartości wektora $\mathbf{b}^{(0)} = [b_{0b}^{(0)}, b_{1b}^{(0)}, b_{0g}^{(0)}, b_{1g}^{(0)}]$.

Krok 2: Numeryczne rozwiązanie problemu (4)-(8) metodą iteracji równania Eulera [Maliar, Maliar, Valli, 2010] i wyznaczenie polityk $c = c(k, \varepsilon, Z, K)$ oraz $k' = k'(k, \varepsilon, Z, K)$.

Krok 3: Symulacja modelu z dużą liczbą konsumentów jeden okres do przodu.

Krok 4: Wyznaczenie nowych wartości $\mathbf{b}^{(i)}$ zgodnie ze wzorami (10)-(11).

Krok 5: Powtarzanie kroków 2-4 przez określoną liczbę okresów T .

3. Wyniki

W badaniach symulacyjnych przyjęto następujące założenia. Symulowano 48 modeli liczących 10 000 konsumentów. W pierwszym etapie symulowane były przy założeniu racjonalnych oczekiwań przez 5000 okresów, aby uzyskać

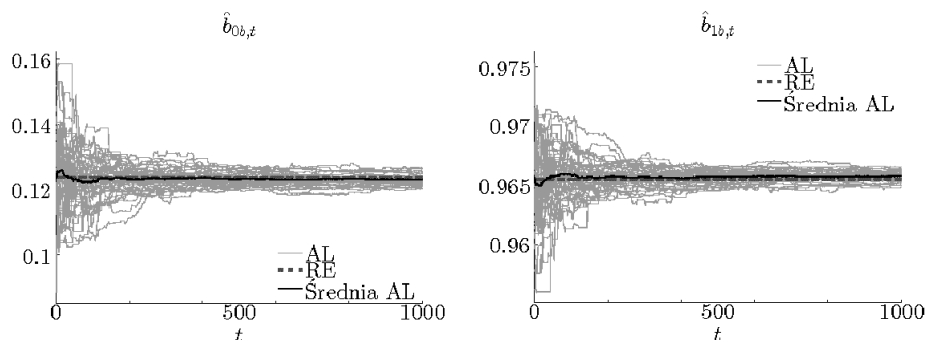
stacjonarny rozkład majątku. Następnie dokonywano symulacji liczących 500 lub 1000 okresów z adaptacyjnym uczeniem się podmiotów przy różnych wartościach początkowych parametrów opisujących dynamikę zagregowanego kapitału. Różniły się one przede wszystkim implikowanym przeciętnym poziomem zagregowanego kapitału danym wzorem:

$$\ln \bar{K}_{im} = \begin{cases} \frac{b_{0b}}{1-b_{1b}} & \text{gdy } Z = Z_b \\ \frac{b_{0g}}{1-b_{1g}} & \text{gdy } Z = Z_g \end{cases} . \quad (12)$$

Wstępne analizy pokazały, że właśnie różnice tych charakterystyk najsilniej wpływają na różnice w zachowaniu się modelu w wersji z racjonalnymi oczekiwaniami i adaptacyjnym uczeniem się.

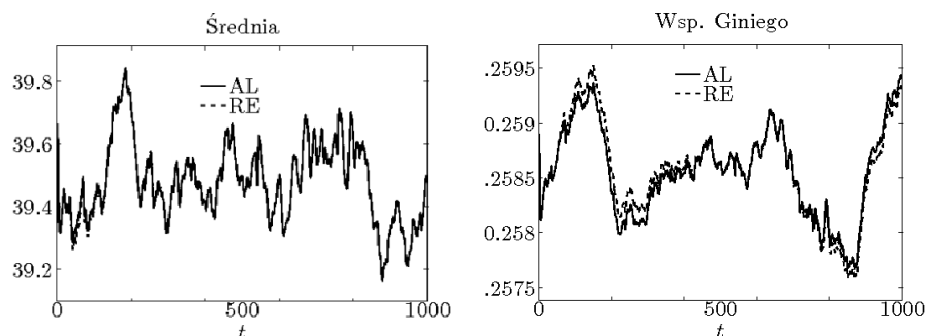
3.1. Wyniki symulacyjne

Na poniższym rysunku przedstawiono trajektorie współczynników b_{0b} oraz b_{1b} dla modelu uczenia z klasyczną MNK w sytuacji, gdy początkowe wartości parametrów szacowano korzystając ze wcześniejszych wartości symulowanych przy założeniu racjonalnych oczekiwań. Na wykresach zaznaczono również średnią wartość symulowanych współczynników oraz wartości przy racjonalnych oczekiwaniach (RE). Oszacowania układają się mniej więcej symetrycznie względem wartości przy racjonalnych oczekiwaniach, w związku z tym przeciętny poziom oszacowań pokrywa się praktycznie z racjonalnymi oczekiwaniami. Uwzględnienie większej liczby okresów pozwalałoby dokładnie zaobserwować zbieżność punktową oszacowań, jednak zmniejszyłoby czytelność wykresów. Podobna sytuacja zachodzi dla ocen \hat{b}_{0g} oraz \hat{b}_{1g} . Tempo zbieżności jest wolne. Potrzeba ponad 10 000 okresów, aby wszystkie oszacowania nie odchyłały się więcej niż o 1% od wartości odpowiadającej racjonalnym oczekiwaniom.



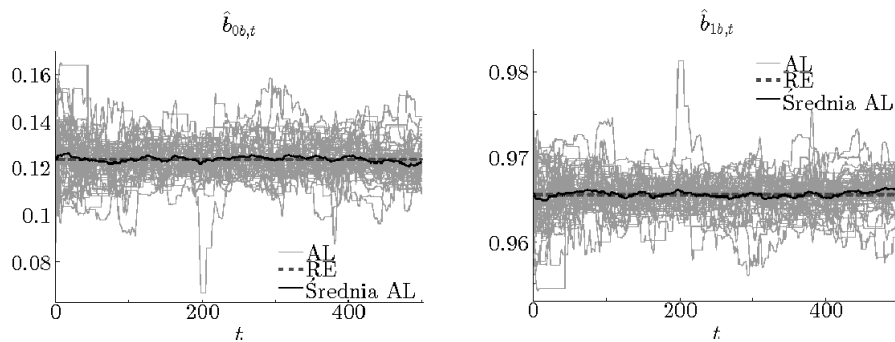
Rys. 1. Symulowane trajektorie współczynników dla klasycznej MNK

Chcąc ocenić, w jakim stopniu adaptacyjne uczenie się wpływa na przewidywania modelu odnośnie do rozkładu majątku, wyznaczono jego poziom przeciętny oraz współczynnik Giniego dla symulowanych rozkładów. Średnie wartości tych charakterystyk zilustrowano na rysunku 2. Wartości dla racjonalnych oczekiwań oraz adaptacyjnego uczenia się w obu przypadkach praktycznie się pokrywają, a więc w sytuacji, gdy wartości startowe średnio rzecz biorąc pokrywają się z racjonalnymi oczekiwaniami adaptacyjne uczenie nie ma wpływu na rozkład majątku w modelu.



Rys. 2. Przecięte wartości średniego poziomu oraz współczynnika Giniego rozkładu kapitału

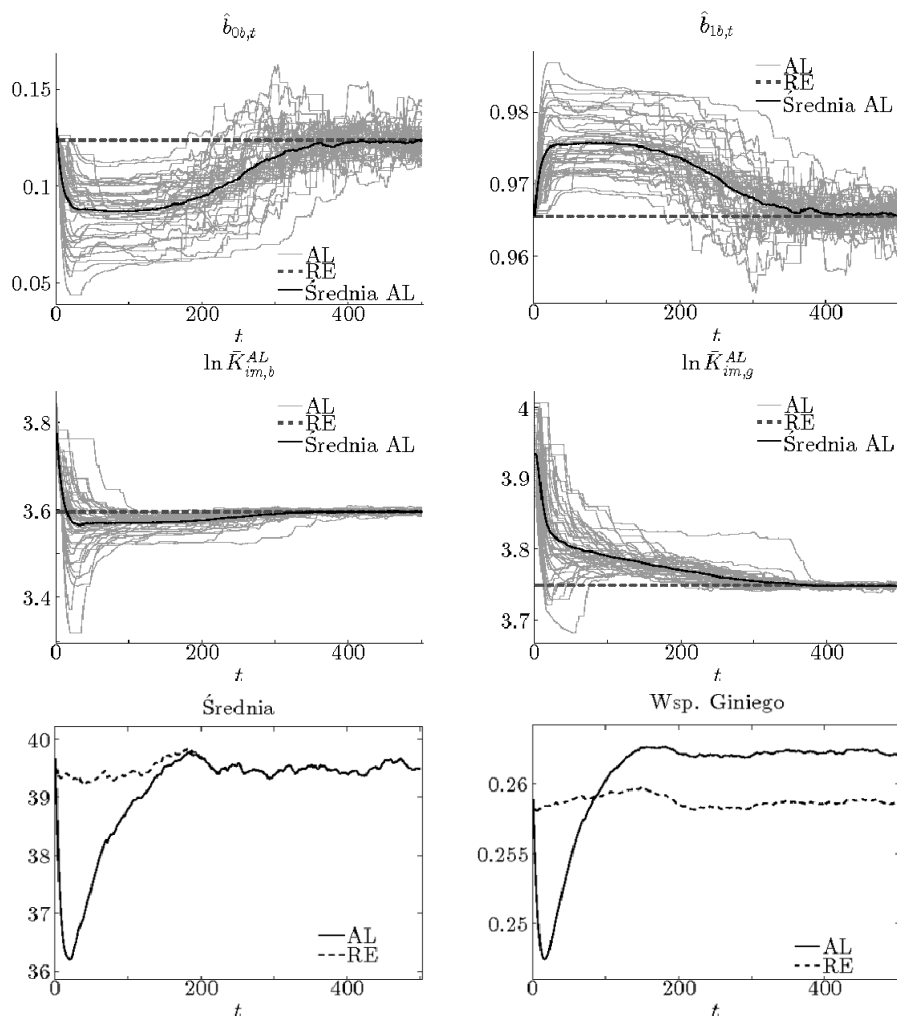
Podobne rozważania przeprowadzono dla uczenia się z wykładniczo ważoną MNK przyjmując $g = 0,05$. Trajektorie oszacowań dla okresu recesji ilustruje rysunek 3. Wartości nie są teraz zbieżne punktowo, ale cechują się stałymi wahaniami wokół poziomu przeciętnego pokrywającego się z wynikami przy racjonalnych oczekiwaniach. W związku z tym także tutaj brakuje wyraźnych różnic pomiędzy racjonalnymi oczekiwaniami a uczeniem adaptacyjnym w zakresie rozkładu majątku.



Rys. 3. Symulowane trajektorie współczynników dla wykładniczo ważonej MNK

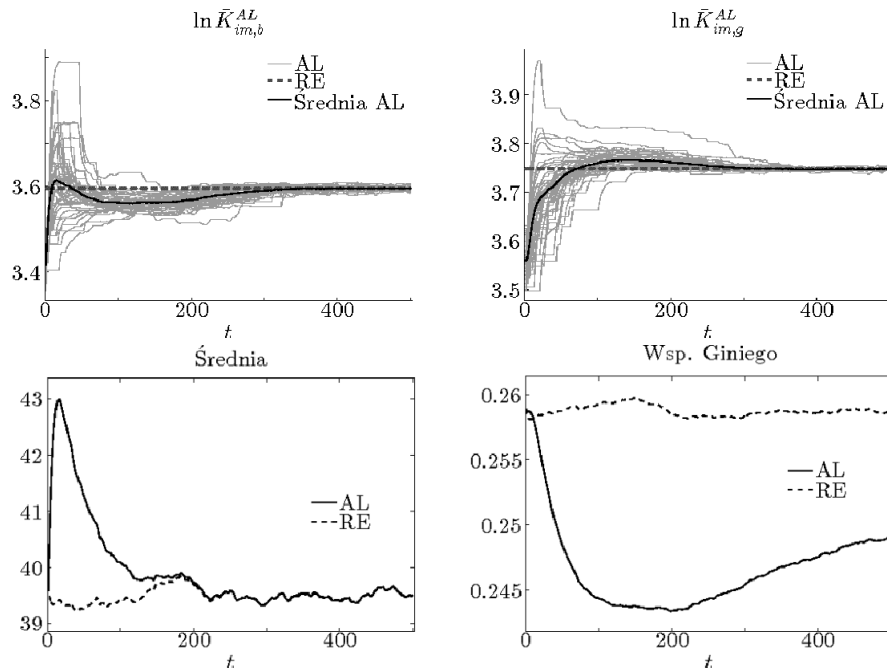
W drugim etapie badań rozważano sytuacje, w których początkowe implikowane średnie wartości zagregowanego kapitału w procesie uczenia systematycznie różniły się od wartości dla racjonalnych oczekiwań. W procesie uczenia uwzględniano jedynie wykładniczo ważoną MNK, z uwagi na fakt, że w tym przypadku zmiany oszacowań są większe niż w przypadku klasycznej MNK i nie ulegają zmniejszeniu. Na rysunku 4 zestawiono trajektorie oszacowań dla przypadku, kiedy startowy implikowany przeciętny poziom zagregowanego kapitału jest średnio rzecz biorąc o 5% wyższy od wartości przy racjonalnych oczekiwaniach. Przedstawiono na nim także zachowanie się wartości implikowanego przeciętnego poziomu zagregowanego kapitału $\ln \bar{K}_{im}^{AL}$ oraz dynamikę charakterystyk rozkładu kapitału w modelu.

Zarówno w odniesieniu do oszacowań, jak i przeciętnego implikowanego poziomu zagregowanego kapitału widoczna jest zbieżność do wartości odpowiadających racjonalnym oczekiwaniom, choć trajektorie te wyglądają nieco inaczej dla okresu wzrostu i recesji gospodarczej, co ilustrują środkowe wykresy omawianego rysunku. Pomimo faktu, iż odchylenia do równowagi związanej z racjonalnymi oczekiwaniami utrzymują się dość długo, różnice w przeciętnym poziomie oraz współczynniku Giniego rozkładu kapitału nie są znaczące, co pokazano na dolnych wykresach. Odstępstwa od racjonalnych oczekiwań skutkują krótkotrwałym spadkiem przeciętnego poziomu kapitału o mniej niż 10%, co pociąga również za sobą wzrost płacy do około 3% oraz podobny spadek stopy procentowej. Początkowo spada również zróżnicowanie rozkładu kapitału. Po pewnym czasie jednak rośnie i pozostaje trwale wyższe niż w modelu z racjonalnymi oczekiwaniami. Odchylenia od wyników dla racjonalnych oczekiwań jednak nie przekraczają 2,5%.



Rys. 4. Wyniki dla modelu ze startowym implikowanym poziomem kapitału przekraczającym wynik dla racjonalnych oczekiwań średnio o 5%

Dość podobne rezultaty uzyskuje się w sytuacji, gdy startowy poziom implikowanego przeciętnego zagregowanego kapitału jest niższy średnio o 5% od wartości odpowiadającej racjonalnym oczekiwaniom. Wyniki te zaprezentowano na rysunku 5. Średni poziom kapitału tymczasowo rośnie do poziomowi około 10% wyższego, natomiast współczynnik Giniego przez długi czas jest niższy, choć różnica ta nie jest specjalnie duża.



Rys. 5. Wyniki dla modelu ze startowym implikowanym poziomem kapitału niższym od wyniku dla racjonalnych oczekiwań średnio o 5%

W pracy przeprowadzono podobne analizy jak na rysunkach 4 i 5, przyjmując w procesie uczenia współczynnik $g = 0,025$, który oznacza wolniejsze zmiany szacowanych parametrów w czasie. W efekcie w przypadku odchylenia startowych wartości implikowanego przeciętnego poziomu zagregowanego kapitału od wartości odpowiadającym racjonalnym oczekiwaniom proces zbieżności zachodził wolniej. Jednak różnice w przeciętnym poziomie oraz współczynniku Giniego rozkładu kapitału nie były znacząco różne od tych, które przedstawiono powyżej. Wyniki nie ulegają także istotnym zmianom, jeżeli konsumenci cechują się funkcją chwilowej użyteczności typu CRRA:

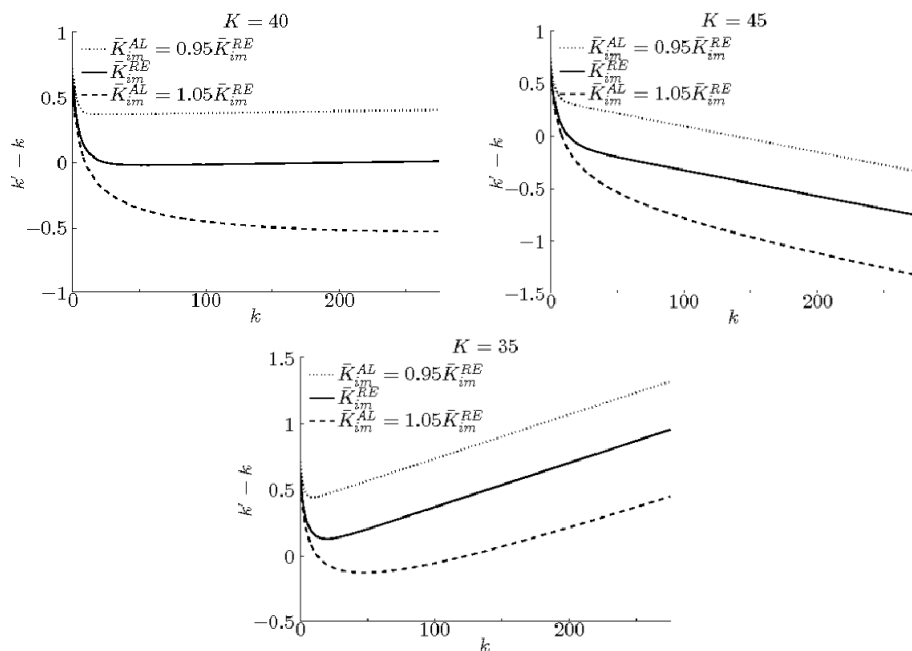
$$u(C) = \frac{C^{1-\nu} - 1}{1-\nu}, \quad (13)$$

przy współczynniku względnej awersji do ryzyka $\nu = 5$.

3.2. Analiza reguł decyzyjnych

Chcąc wyjaśnić efekty obserwowane powyżej, reguły decyzyjne konsumentów w sytuacjach, gdy równania ruchu zagregowanego kapitału (15)-(16) odbiegają od wersji przy racjonalnych oczekiwaniach. Zestawiono je na rysunku 6.

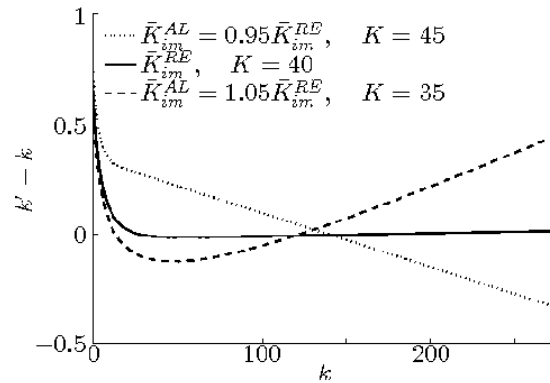
Ilustrują one zależność pomiędzy aktualnym majątkiem k konsumenta, a inwestycjami netto $k' - k$ dla różnych wartości zagregowanego kapitału K oraz przy różnych poziomach implikowanego poziomu zagregowanego kapitału przy założeniu, iż $b_{1b}^{AL} = b_{1b}^{RE}$ oraz $b_{1g}^{AL} = b_{1g}^{RE}$. Omawiane reguły decyzyjne różnią się w zależności od stanu gospodarki oraz statusu na rynku pracy. Na wykresach przedstawiono reguły uśrednione prawdopodobieństwami pojawienia się danego stanu.



Rys. 6. Reguły decyzyjne konsumentów dla różnych wartości zagregowanego kapitału K

Na wszystkich trzech wykresach widoczna jest podobna sytuacja. Jeżeli konsument przewiduje wyższy poziom zagregowanego kapitału w stosunku do poziomu równowagi przy racjonalnych oczekiwaniach $\ln \bar{K}_{im}^{AL} = 1,05 \ln \bar{K}_{im}^{RE}$, wtedy jego inwestycje netto są niższe od poziomu przy racjonalnych oczekiwaniach, a więc zasób kapitału w gospodarce będzie spadał. Przewidując niższy poziom zagregowanego kapitału, inwestycje netto są wyższe niż przy racjonalnych oczekiwaniach. Widać więc brak zgodności pomiędzy przewidywaniami a podejmowanymi decyzjami. W efekcie, jeżeli konsumenci będą mogli korygować swoje przewidywania odnośnie do implikowanego poziomu zagregowanego kapitału poprzez uczenie się, będą to robili zawsze w kierunku racjonalnych oczekiwań.

Analogiczna sytuacja obserwowana jest w przypadku różnic w samych współczynnikach autoregresyjnych.



Rys. 7. Reguły decyzyjne konsumentów dla różnych wartości zagregowanego kapitału K oraz \bar{K}_{im}

Zestawienie na jednym wykresie na rysunku 7 reguł decyzyjnych dla różnych wartości K oraz \bar{K}_{im} wyjaśnia obserwowane zmiany wskaźników Giniego. W przypadku przewidywań niższego poziomu zagregowanego kapitału, jego faktyczny poziom jest powyżej średniej, co sprawia, że konsumenci dysponujący niskim zasobem kapitału, akumulują go, a zamożni – zmniejszają jego zasób (linia kropkowana), co skutkuje mniejszym jego zróżnicowaniem pomiędzy konsumentami, co obserwujemy na rysunku 5. W przypadku przewidywania wyższego poziomu kapitału (linia przerywana) zachodzi sytuacja odwrotna i zróżnicowanie jednostek rośnie jak to ilustruje rysunek 4.

Podsumowanie

W pracy rozważano standardowy model DSGE z niejednorodnymi konsumentami, zagregowanym ryzykiem oraz ograniczeniami w zaciąganiu zobowiązań, w którym założenie o racjonalnych oczekiwaniach w odniesieniu do dynamiki zagregowanego kapitału zastąpiono mechanizmem adaptacyjnego uczenia się podmiotów. Zakładano przy tym, że jednostki są jednorodne ze względu na proces uczenia.

Przeprowadzone analizy symulacyjne pozwoliły na wyciągnięcie następujących wniosków. Po pierwsze współczynniki równań dynamiki zagregowanego kapitału przy adaptacyjnym uczeniu się są zbieżne do wartości odpowiadającym

racjonalnym oczekiwaniom dla wszystkich sensownych wartości początkowych. Największy wpływ na rozkład kapitału w modelach z adaptacyjnym uczeniem się ma implikowany średni poziom zagregowanego kapitału. Jeżeli jest taki sam jak jego odpowiednik w modelu racjonalnych oczekiwań, wtedy nie ma różnic pomiędzy oboma rodzajami modeli w odniesieniu do rozkładu kapitału. W przypadku, gdy przewidywany poziom kapitału jest wyższy od wartości odpowiadającej racjonalnym oczekiwaniom przeciętny poziom kapitału w modelu tymczasowo spada w umiarkowanym stopniu, a jako zróżnicowanie mierzone współczynnikiem Giniego nieznacznie, ale trwale rośnie. Gdy przewidywany poziom kapitału jest niższy, obserwowana jest sytuacja odwrotna. Powyższe wnioski nie ulegają zmianie, jeżeli przyjmuje się różne szybkości procesu uczenia się, a także współczynnik awersji do ryzyka w chwilowej funkcji użyteczności konsumentów.

Uzyskane wyniki wskazują, że uchylenie założenia o racjonalnych oczekiwaniach w omawianym modelu nie wpływa znacząco na jego przewidywania odnośnie do zróżnicowania rozkładu majątku. Może jednak powodować zmiany w przeciętnym poziomie kapitału, co przekłada się przede wszystkim na wysokość płacy oraz stopę procentową.

Literatura

- Acedański J. (2009), *Ceny akcji w wybranych modelach DSGE z sektorem produkcji* [w:] W. Szkutnik (red.), *Ryzyko w procesach gospodarczych, społecznych i inwestycyjnych kapitałowych*, Studia Ekonomiczne, nr 57, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.
- Evans G., Honkapohja S. (2001), *Learning and Expectations in Macroeconomics*, Princeton University Press, Princeton – Oxford.
- Grabek G., Kłos B., Koloch G. (2010), *SOE PL 2009 – Model DSGE małej otwartej gospodarki estymowany na polskich danych*, Materiały i Studia, nr 251, NBP, Warszawa.
- Haan W. den, Judd K., Juillard M. (2010), *Computational Suite of Models with Heterogeneous Agents: Incomplete Markets and Aggregate Uncertainty*, “Journal of Economics Dynamics and Control”, Vol. 34(1).
- Krusell P., Smith A. (1998), *Income and Wealth Heterogeneity in the Macroeconomy*, “The Journal of Political Economy”, Vol. 106(5).
- Maliar L., Maliar S., Valli F. (2010), *Solving the Incomplete Markets Model with Aggregate Uncertainty Using the Krusell–Smith Algorithm*, “Journal of Economics Dynamics and Control”, Vol. 34(1).
- Wickens M. (2008), *Macroeconomic Theory. A Dynamic General Equilibrium Approach*, Princeton University Press, Princeton – Oxford.

**RATIONAL EXPECTATIONS AND ADAPTIVE LEARNING
IN HETEROGENEOUS AGENTS DSGE MODELS**

Summary: The paper studies the standard heterogeneous agents DSGE model with borrowing constraints and aggregate uncertainty where the rational expectations hypothesis is replaced by the adaptive learning scheme. The convergence of the learning process to the rational expectations as well as its impact on the capital distribution is analyzed. The simulations show that the learning process converges to rational expectations for all admissible initial values. It results in moderate but temporary changes in mean level of aggregate capital and small but persistent changes in Gini coefficient for the capital distribution.

Keywords: rational expectations, adaptive learning, heterogeneous agents.