

Aproksymacja cen aktywów we współczesnych modelach makroekonomicznych

Wstęp

Ostatni kryzys finansowy oraz tocząca się w literaturze debata dotycząca reakcji władz monetarnych na pojawiające się, co jakiś czas na rynkach aktywów bańki spekulacyjne [zob. Bernanke, Gertler, 2000] wskazują wyraźnie na potrzebę prowadzenia badań uwzględniających interakcje pomiędzy sferą makroekonomiczną a rynkami finansowymi. W ostatnich latach najpopularniejszym narzędziem pozwalającym na prowadzenie tego typu badań są dynamiczne, stochastyczne modele równowagi ogólnej (ang. *dynamic, stochastic general equilibrium* – DSGE) [zob. Acedański, 2010; Grabek, Kłos, Koloch, 2010]. Ich cechą charakterystyczną są silne fundamenty mikroekonomiczne. Równania takich modeli są bowiem efektem agregacji optymalnych decyzji podejmowanych przez pojedyncze podmioty występujące w modelu. Przykładowo, zgodnie z klasyczną teorią mikroekonomii, konsumenci dążą do maksymalizacji użyteczności płynącej z konsumpcji i czasu wolnego, a celem działania przedsiębiorstw jest maksymalizacja zysków lub swojej wartości w oczach właścicieli. Ponadto w modelach DSGE zakłada się zwykle, że podmioty cechują się racjonalnymi oczekiwaniami, ich decyzje koordynowane są przez mechanizm ogólnej równowagi rynkowej, a pierwotnym źródłem fluktuacji modelowanych zmiennych są stochastyczne zaburzenia o ekonomicznej interpretacji.

Równania modeli DSGE będące w większości warunkami koniecznymi optymalnych decyzji podmiotów tworzą układ stochastycznych, nieliniowych równań różnicowych. Dokładne rozwiązanie takich układów, celem wyznaczenia jawnych równań dynamiki modelowanych zmiennych, w praktyce zwykle nie jest możliwe. Stąd niezbędne jest stosowanie skomplikowanych numerycznie metod aproksymacji. Z zagadnieniem tym związany jest istotny problem: na ile własności modelu przybliżonego są zgodne z własnościami oryginalnej wersji modelu.

Celem tego artykułu jest przebadanie, czy występują istotne różnice pomiędzy własnościami modeli aproksymowanych za pomocą różnych podejść w odniesieniu do zachowania się cen aktywów finansowych takich jak akcje i obligacje. Badanie przeprowadzono na modelu opracowanym przez Jermanna [Jermann, 1998]. Jest to prosty model DSGE, który jest w stanie prawidłowo odwzorowywać najważniejsze charakterystyki zarówno zmiennych makroekonomicznych jak również cen akcji i stopy wolnej od ryzyka. Model ten aproksymowano różnymi metodami i badano charakterystyki zmiennych finansowych.

* Dr, Katedra Metod Statystyczno-Matematycznych w Ekonomii Wydziału Ekonomii UE w Katowicach, jan.acedanski@ue.katowice.pl

wych takich uproszczonych wersji. Dodatkowo w przypadku niektórych metod aproksymacji odwoływano się również do rezultatów znanych z literatury.

Dotychczas w literaturze problem aproksymacji rozwiązań modeli DSGE analizowany był głównie pod kątem dokładności metod aproksymacji [Arouba, Fernandez-Villaverde, Rubio-Ramirez, 2006; Heer, Maussner, 2008b; Acedański, 2009]. To znaczy analizowano wybrane równania modelu i na ich podstawie wyznaczano błędy aproksymacji. W ten sposób wskazywano najdokładniejsze metody przybliżonego rozwiązywania. Wyniki tych badań wskazywały generalnie, iż dokładność różnych metod jest wyraźnie zróżnicowana. Nie analizowano jednak, czy różnice w dokładności przekładają się na różnice w charakterystykach modeli, które są zazwyczaj podstawą rozważań w badaniach makroekonomicznych.

Należy również podkreślić, że w literaturze w zasadzie nie spotyka się systematycznych studiów nad dokładnością metod aproksymacji cen aktywów. Tymczasem przy aproksymacji zmiennych finansowych wymagana jest zwykle większa dokładność niż przy samych równaniach zmiennych makroekonomicznych. Dodatkowo ewentualne badania porównawcze utrudnia duża liczba podejść, jakie spotyka się przy aproksymacji stóp zwrotu z akcji i obligacji.

Praca składa się z trzech części. W pierwszej przedstawiono model Jermanna, będący podstawą analiz w pracy. Następnie omówiono krótko najczęściej spotykane metody aproksymacji rozwiązań modeli DSGE. W rozdziale trzecim zaprezentowano wyniki badań porównawczych.

1. Model Jermanna

Model ten jest rozszerzeniem stochastycznego modelu wzrostu Ramseya. Występują w nim dwie grupy podmiotów: gospodarstwa domowe oraz przedsiębiorstwa. Reprezentatywne gospodarstwo domowe dąży do maksymalizacji zdyskontowanego strumienia użyteczności z konsumpcji, przy czym w funkcji użyteczności występują przyzwyczajenia konsumpcyjne, które są modelową reprezentacją obserwacji, że ludzie oceniają swoje aktualne położenie nie w kategoriach bezwzględnych, ale w porównaniu do swojej wcześniejszej sytuacji. Wydatki na konsumpcję finansowane są z dochodów z pracy, dywidend wypłacanych przez przedsiębiorstwa oraz zysków kapitałowych. Oszczędności przeznaczane są natomiast na zakup akcji oraz pozbawionych ryzyka, jednokresowych obligacji.

Reprezentatywne przedsiębiorstwo wytwarza jeden towar stosując klasyczną technologię opisaną funkcją produkcji Cobba-Douglassa z pracą oraz kapitałem, jako czynnikami produkcji. Zakłada się ponadto, że produktywność czynników produkcji jest zmienną losową, której dynamika opisana jest procesem autoregresyjnym. W danym okresie przedsiębiorstwo określa poziom nakładów inwestycyjnych dążąc do maksymalizacji swojej wartości w oczach właścicieli, czyli maksymalizacji strumienia zdyskontowanych dywidend, gdzie czynnikiem dyskontującym jest krańcowa użyteczność gospodarstw domowych. Ponieważ przyjmuje się, że w funkcji użyteczności nie występuje czas wolny,

więc podaź pracy w modelu jest stała i znormalizowana do 1. Natomiast zasób kapitału zmniejsza się na skutek deprecjacji, a zwiększany jest dzięki nakładom inwestycyjnym. Sposób w jaki nakłady inwestycyjne przekładają się na wzrost zasobu kapitału, opisywany jest rosnącą i wklęsłą funkcją inwestycji.

W swojej najprostszej wersji model liczy 10 zmiennych i tyle samo równań. Dokładne ich wyprowadzenie można znaleźć w wielu pracach [zob. Ace-
dański, 2010; Heer, Maussner, 2008a]. Wśród zmiennych uwzględnionych w modelu występują:

- konsumpcja – C
- dywidendy – D
- płace – W
- krańcowa użyteczność reprezentatywnego gospodarstwa domowego – MU
- zasób kapitał – K
- stochastyczne zaburzenie produktywności czynników produkcji – Z
- nakłady inwestycyjne – I
- produkcja globalna – Y
- cena akcji – P
- cena pozbawionej ryzyka, jednookresowej obligacji – P_f

Model tworzą następujące równania:

1. Równanie Eulera dla nakładów inwestycyjnych:

$$\frac{MU_t}{\Phi'\left(\frac{\mathcal{I}_t}{K_{t-1}}\right)} = E_t \left[\frac{\beta}{\gamma} MU_{t+1} \left(\alpha Z_{t+1} \left(\frac{K_t}{\gamma} \right)^{\alpha-1} + \frac{1-\delta}{\Phi'\left(\frac{\mathcal{I}_{t+1}}{K_t}\right)} - \frac{\frac{\mathcal{I}_{t+1}}{K_t} \Phi'\left(\frac{\mathcal{I}_{t+1}}{K_t}\right) - \Phi\left(\frac{\mathcal{I}_{t+1}}{K_t}\right)}{\Phi'\left(\frac{\mathcal{I}_{t+1}}{K_t}\right)} \right) \right] \quad (1)$$

gdzie $\Phi()$ oznacza funkcję inwestycji, która pokazuje, w jaki sposób względne nakłady inwestycyjne \mathcal{I}_t / K_{t-1} przekształcają się w zasób kapitału, E_t oznacza wartość oczekiwaną obliczaną ze względu na informacje dostępne w okresie t , β jest współczynnikiem dyskontowym gospodarstwa domowego, γ oznacza tempo wzrostu gospodarczego, α reprezentuje udział kapitału w funkcji produkcji, natomiast δ jest stopą deprecjacji kapitału. Równanie to pokazuje, że przedsiębiorstwo powinno ustalić nakłady inwestycyjne na takim poziomie, aby z punktu widzenia użyteczności gospodarstwa domowego koszt zwiększenia zasobu kapitału o jedną jednostkę w okresie t (lewa strona równania)¹ równy był oczekiwanym zdyskontowanym przychodom z tytułu większego zasobu kapitału w okresie $t + 1$ (prawa strona równania)².

¹ $1/\Phi'(\mathcal{I}_t/K_{t-1})$ reprezentuje krańcowy współczynnik q Tobina, który wskazuje, jakie nakłady należy ponieść, aby zwiększyć zasób kapitału o jednostkę.

² $\alpha Z_{t+1}(K_t/\gamma)^{\alpha-1}$ oznacza krańcowy produkt kapitału, $(1-\delta)/\Phi'\left(\frac{\mathcal{I}_{t+1}}{K_t}\right)$ – wartość dodatkowej jednostki kapitału w okresie $t + 1$, $\left[\frac{\mathcal{I}_{t+1}}{K_t} \Phi'\left(\frac{\mathcal{I}_{t+1}}{K_t}\right) - \Phi\left(\frac{\mathcal{I}_{t+1}}{K_t}\right) \right] / \Phi'\left(\frac{\mathcal{I}_{t+1}}{K_t}\right)$ – efekt spadku wydajności nakładów inwestycyjnych spowodowanego wyższym poziomem kapitału w okresie $t + 1$.

2. Definicja krańcowej użyteczności:

$$MU_t = \left(C_t - \frac{\chi}{\gamma} C_{t-1} \right)^{-\nu} - \chi \frac{\beta}{\gamma} E_t \left(C_{t+1} - \frac{\chi}{\gamma} C_t \right)^{-\nu} \quad (2)$$

gdzie χ reprezentuje siłę przyzwyczajzeń konsumpcyjnych, natomiast ν określa stopień krzywizny funkcji użyteczności. Skomplikowana postać użyteczności krańcowej jest efektem wprowadzenia do funkcji użyteczności przyzwyczajzeń konsumpcyjnych. W sytuacji, gdyby przyzwyczajenia nie występowały, wzór (2) uprościłby się do $MU_t = C_t^{-\nu}$, czyli do rezultatu znanego ze standardowej funkcji ze stałym współczynnikiem awersji do ryzyka (ang. *constant relative risk aversion* – CRRA).

3. Ograniczenie budżetowe gospodarstwa domowego:

$$C_t = W_t + D_t \quad (3)$$

Z uwagi na przyjęte założenie, że podaż akcji jest stała a podaż netto obligacji równa 0, ceny tych aktywów nie pojawiają się w ograniczeniu budżetowym.

4. Równanie ruchu zasobu kapitału:

$$\gamma K_t = \left[1 - \delta + \Phi \left(\frac{I_t}{K_{t-1}} \right) \right] K_{t-1} \quad (4)$$

Równanie to reprezentuje fakt, że zasób kapitału w każdym okresie zmniejsza się na skutek deprecjacji, a zwiększany jest przez nakłady inwestycyjne.

5. Funkcja produkcji:

$$Y_t = Z_t \left(\frac{K_{t-1}}{\gamma} \right)^\alpha \quad (5)$$

We wzorze (5) nie występuje praca, gdyż została ona znormalizowana do 1.

6. Definicja dywidend:

$$D_t = Y_t - W_t - I_t \quad (6)$$

Dywidendy utożsamiane są z zyskami przedsiębiorstwa będącymi różnicą pomiędzy wielkością produkcji a płacami oraz nakładami inwestycyjnymi.

7. Równanie płac:

$$W_t = (1 - \alpha) Z_t \left(\frac{K_{t-1}}{\gamma} \right)^\alpha \quad (7)$$

Płace równe są krańcowemu produktowi pracy.

8. Równanie dynamiki zaburzenia produktywności czynników produkcji:

$$Z_t = \rho Z_{t-1} + \sigma \varepsilon_t \quad (8)$$

gdzie ρ jest współczynnikiem autokorelacji, σ oznacza warunkowe odchylenie standardowe procesu, natomiast $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ jest białym szumem.

9. Równanie ceny akcji:

$$P_t = E_t \left[\beta \frac{MU_{t+1}}{MU_t} (P_{t+1} + D_{t+1}) \right] \quad (9)$$

Zgodnie z klasycznym podejściem cena akcji w okresie t równa jest zdyskontowanemu przychodom z akcji w okresie następnym, na które składa się dywi-

denda oraz cena akcji w okresie $t + 1$. Jako współczynnik dyskontowy występuje krańcowa użyteczność gospodarstwa domowego.

10. Cena zerokuponowej pozbawionej ryzyka jednookresowej obligacji:

$$P_{f,t} = E_t \left(\beta \frac{MU_{t+1}}{MU_t} \right) \quad (10)$$

Cena ta jest równa wartości oczekiwanej stochastycznego czynnika dyskontującego $\beta MU_{t+1} / MU_t$. Stopa wolna od ryzyka równa jest odwrotności ceny pozbawionej ryzyka obligacji.

Zmienne C_{t-1} , K_{t-1} oraz Z_t tworzą zbiór zmiennych stanu modelu, to znaczy, że znajomość ich wartości pozwala na wyznaczenie wartości wszystkich pozostałych zmiennych modelu w okresie t . Należy zwrócić także uwagę, że równania cen akcji i obligacji w omawianym modelu mają charakter definicyjny, a więc ich usunięcie nie będzie miało żadnego wpływu na dynamikę zmiennych makroekonomicznych.

2. Metody aproksymacji rozwiązań modeli DSGE

Układ równań tworzących model DSGE można symbolicznie zapisać w postaci:

$$E_t [f(\mathbf{X}_{t+1}, \mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \boldsymbol{\sigma}_t)] = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (11)$$

gdzie \mathbf{X}_t oznacza n_x -wymiarowy wektor zmiennych modelu, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ jest n_ε -wymiarowym wektorem zaburzeń losowych, f jest macierzową funkcją, natomiast $\boldsymbol{\sigma}$ reguluje wariancję wektora $\boldsymbol{\varepsilon}_t$. Poszukiwane rozwiązanie przyjmuje ogólną formę:

$$\mathbf{X}_t = g(\mathbf{X}_{t-1}, \boldsymbol{\sigma}_t) \quad (12)$$

Czasami rozwiązanie przedstawia się także wyróżniając n_s -wymiarowy wektor zmiennych stanu \mathbf{s}_t :

$$\mathbf{X}_t = g_x(\mathbf{S}_{t-1}, \boldsymbol{\sigma}_t), \quad \mathbf{S}_t = g_s(\mathbf{S}_{t-1}, \boldsymbol{\sigma}_t) \quad (13)$$

W literaturze spotyka się trzy główne typy metod aproksymacji rozwiązań omawianych układów równań: perturbacyjne, projekcyjne oraz wywodzące się z teorii programowania dynamicznego oraz zasady optymalności Bellmana. Oprócz nich istnieją również specjalne podejścia opracowane pod kątem aproksymacji równań cen akcji i obligacji. W pracy omówiono jedną z takich metod – aproksymację logliniowo-lognormalną. Szerszą prezentację metod aproksymacji rozwiązań modeli DSGE można znaleźć w podręcznikach [Heer, Maussner, 2008a; Ljungqvist, Sargent, 2004; Miranda, Fackler, 2002].

2.1 Metody perturbacyjne

Metody perturbacyjne bazują najczęściej na rozwinięciu funkcji g w szereg Taylora w otoczeniu pewnego punktu. Tym punktem najczęściej jest punkt równowagi długookresowej w warunkach braku niepewności (ang. *deterministic steady state*) rozumiany jako taki punkt, do którego zmierzają wartości zmiennych modelu w sytuacji, gdy w modelu nie występują zaburzenia, $\boldsymbol{\sigma} = 0$. Brak zaburzeń losowych powoduje, że osiągniętszy punkt

równowagi długookresowej wartości zmiennych lub ich wzajemne relacje nie ulegają już zmianie. W ramach charakterystyki metod perturbacyjnych przedstawiono najpopularniejsze obecnie podejście, czyli linearyzację.

W przypadku linearyzacji rozwiązanie modelu (12) aproksymowane jest funkcją liniową. W efekcie przyjmuje ono postać:

$$\mathbf{X}_t \approx \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{G}_x (\mathbf{X}_{t-1} - \bar{\mathbf{X}}) + \mathbf{G}_\varepsilon \sigma \varepsilon_t \quad (14)$$

gdzie $\bar{\mathbf{X}}$ oznacza wartości zmiennej \mathbf{X} w punkcie równowagi długookresowej, natomiast \mathbf{G}_x oraz \mathbf{G}_ε są, początkowo nieznanymi, macierzami wartości pochodnych funkcji g ze względu na wektory \mathbf{X}_{t-1} oraz $\sigma \varepsilon_t$ obliczonymi w punkcie równowagi długookresowej modelu. Różniczkując funkcję f ze względu na \mathbf{X}_{t-1} oraz $\sigma \varepsilon_t$ i przyrównując wartości oczekiwane uzyskanych pochodnych do 0³ otrzymuje się układ równań macierzowych, w którym niewiadomymi są macierze \mathbf{G}_x oraz \mathbf{G}_ε , a znanymi parametrami pochodne funkcji f . Znalezienie rozwiązania ze względu na \mathbf{G}_x sprowadza się do rozwiązania macierzowego równania kwadratowego, co można stosunkowo łatwo zrobić stosując na przykład dekompozycję Schura. Natomiast przy danej wartości \mathbf{G}_x obliczenie \mathbf{G}_ε wymaga jedynie rozwiązania równania liniowego.

Należy jeszcze wspomnieć, że uzyskane macierze \mathbf{G}_x oraz \mathbf{G}_ε , a więc i całe rozwiązanie, nie zależą w żaden sposób od macierzy kowariancji zaburzeń losowych Σ . Własność ta nazywana jest zasadą równoważności braku ryzyka (ang. *certainty equivalence principle*). Nazwa ta podkreśla, że aproksymowane optymalne decyzje podejmowane przez konsumentów i przedsiębiorstwa są identyczne z decyzjami, które byłyby podejmowane, gdyby model był deterministyczny. W analogiczny sposób wyznacza się rozwiązania wyższych rzędów [zob. Kowal, 2007]. Bazując na rozwiązaniach niższych rzędów wyznaczanie poszukiwanych macierzy pochodnych sprowadza się do rozwiązywania macierzowych układów równań liniowych.

2.2 Metody projekcyjne

Metody projekcyjne przybliżają rozwiązania globalnie korzystając z ogólnej teorii aproksymacji funkcji. W praktyce do znalezienia rozwiązania całego układu równań wystarczy znajomość tylko niektórych składowych funkcji g . Pozostałe łatwo wtedy wyznaczyć analitycznie. Ze względu na korzystne własności numeryczne jako funkcje aproksymujące najczęściej wykorzystywane są wielomiany Czebyszewa. Zdefiniowane są one rekurencyjnie dla $x \in [-1; 1]$:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k \geq 2 \quad (15)$$

przy czym k oznacza stopień wielomianu. Rzadziej stosowane są zwykle wielomiany lub funkcje sklepane. Funkcje wielu zmiennych przybliżane są różnymi kombinacjami liniowymi wielomianów Czebyszewa. W omawianym podejściu nieznana funkcja $g(\mathbf{S}, \varepsilon)$ aproksymowana jest funkcją:

³ Zgodnie z twierdzeniem o różniczkowaniu funkcji uwikłanej, jeżeli funkcja f jest równa 0, to wszystkie jej pochodne także muszą być równe 0.

$$\tilde{g}(\mathbf{S}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\psi}) = \tilde{g}(T(\mathbf{S}, \boldsymbol{\varepsilon}), \boldsymbol{\psi}) \quad (16)$$

gdzie $\boldsymbol{\psi}$ jest wektorem parametrów definiujących funkcję aproksymującą, a $T(\mathbf{S}, \boldsymbol{\varepsilon})$ oznacza kombinację wielomianów Czebyszewa dla zmiennych \mathbf{S} oraz $\boldsymbol{\varepsilon}$ przeskalowanych na przedział $[-1; 1]$. Dla uproszczenia notacji pominięto dolne indeksy czasowe przy zmiennych.

Współczynniki $\boldsymbol{\psi}$ są nieznane. Do ich wyznaczenia konieczne jest zdefiniowanie funkcji błędu ER mierzącej jakość aproksymacji. W tym celu wykorzystuje się składowe funkcji f , w których nieznane równania dynamiki poszczególnych zmiennych wyznaczono na podstawie funkcji aproksymującej:

$$ER(\mathbf{S}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\psi}) = E_t f^{(i)}(\tilde{g}_x(\tilde{g}_s(\mathbf{S}_{t-1}, \boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\psi}), \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}, \boldsymbol{\psi}), \tilde{g}_x(\mathbf{S}_{t-1}, \boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\psi}), \mathbf{S}_{t-1}) \quad (17)$$

przy czym $f^{(i)}$ oznacza i -tą składową funkcji f . Gdy dla danego wektora $\boldsymbol{\psi}^*$ i dowolnych wartości \mathbf{S} oraz $\boldsymbol{\varepsilon}$ spełniona jest równość $ER(\mathbf{S}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\psi}^*) = 0$, oznacza to, że funkcja aproksymująca dokładnie przybliża funkcję aproksymowaną, czyli $\tilde{g}(\mathbf{S}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\psi}^*) = g(\mathbf{S}, \boldsymbol{\varepsilon})$. Wartości $\boldsymbol{\psi}$ dobiera się więc tak, by odchylenia wartości funkcji ER od 0 były jak najmniejsze. Przy czym w praktyce stosuje się różne sposoby pomiaru odchyień.

2.3 Metody programowania dynamicznego

Rekursywna natura modeli DSGE sprawia, że mogą być one postrzegane jako zadania programowania dynamicznego i rozwiązywane przez zastosowanie zasady optymalności Bellmana. Istota podejścia scharakteryzowana będzie od razu na przykładzie modelu Jermanna.

Jeżeli przez V_t oznaczyć największą możliwą do osiągnięcia wartość reprezentatywnego przedsiębiorstwa w okresie t mierzoną użytecznością zdyskontowanego strumienia dywidend:

$$V_t = \max_{I_t} E_t \left[\sum_{h=0}^{\infty} \beta^h MU_{t+h} D_{t+h} \right] \quad (18)$$

to zasada optymalności Bellmana dla modelu Jermanna przyjmuje postać:

$$V_t = \max_{I_t} \{MU_t D_t + \beta E_t V_{t+1}\}, \quad \text{p.w. (4),(6).} \quad (19)$$

A więc maksymalizując swoją wartość w okresie t przedsiębiorstwo powinno brać pod uwagę użyteczność wypłaconych w tym okresie dywidend oraz swoją oczekiwaną wartość w okresie następnym. V_t jest funkcją zmiennych stanu modelu, w tym przypadku konsumpcji C_{t-1} , kapitału K_{t-1} oraz zaburzenia produktywności Z_t .

Poszukiwaną funkcję V można wyznaczyć iteracyjnie. Daną propozycję początkową $V^{(0)}$ wstawia się do prawej strony równania (19). Znajdując maksimum wyznacza się nową funkcję $V^{(1)}$, którą ponownie wstawia się do prawej strony. Procedurę kontynuuje się do momentu, w którym zmiany wartości funkcji wartości będą mniejsze od przyjętej wielkości granicznej. Takie podejście nazywane jest w literaturze iteracją funkcji wartości. Twierdzenie o punkcie stałym odwzorowania zbliżającego gwarantuje, przy określonych założeniach, zbieżność procedury iteracyjnej.

W praktyce analityczne wyznaczenie funkcji V jest bardzo trudne, więc najczęściej jej wartości wyznacza się jedynie w wybranych punktach C_i, K_i, Z_i dokonując dyskretyzacji przestrzeni stanów. W celu zwiększenia dokładności rozwiązania stosuje się zwykle interpolację liniową pomiędzy punktami przestrzeni zmiennych stanu lub też procedurę zaproponowaną przez Howarda [zob. Miranda, Fackler, 2002, s. 165-166].

2.4 Aproksymacja równań zmiennych finansowych

Opisane powyżej metody można również, bez konieczności wprowadzania istotnych zmian, zastosować do aproksymacji równań dynamiki cen akcji i obligacji. Jednak należy mieć na uwadze, że nie wszystkie metody faktycznie nadają się do tego celu. Przykładowo, przy linearyzacji ze względu na zasadę równoważności braku ryzyka równanie ceny akcji przyjmuje taką postać, jak gdyby konsumenci traktowali akcje jako pozbawione ryzyka, co zaprzecza ich istotie. W efekcie oczekiwana stopa zwrotu z akcji jest równa stopie wolnej od ryzyka. Problem ten nie dotyczy już rozwinięcia kwadratowego. Jednak jego słabością jest natomiast stałość oczekiwanej premii za ryzyko oraz warunkowych wariancji. Tymczasem wahania tych dwóch wielkości są ważną cechą rynków aktywów. Aby wyeliminować te wady, stosuje się więc na przykład rozwinięcia trzeciego lub wyższych rzędów.

Problem zerowej premii akcyjnej przy linearyzacji modelu można także rozwiązać w inny sposób. Wykorzystuje się przy tym loglinearyzację oraz własność rozkładu logarytmiczno-normalnego, która mówi, że wartość oczekiwana zmiennej losowej o takim rozkładzie zależy także od jej zmienności.⁴ W ten sposób wartości oczekiwane występujące we wzorach (9-10) obliczane nawet w przypadku wyrażeń liniowych uwzględniają macierz kowariancji zaburzeń. A tego składnika brakuje właśnie w zwykłym rozwinięciu liniowym. Omówiona poniżej aproksymacja logliniowo-lognormalna (ang. *loglinear-lognormal approximation*) została po raz pierwszy zastosowana w pracy Jermanna.

Jeżeli zmienne modelu wyrażone są za pomocą logarytmów, wtedy rozwiązanie uzyskane w wyniku linearyzacji przyjmie postać:

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{M}_x \hat{\mathbf{s}}_{t-1} + \mathbf{W}_x \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \hat{\mathbf{s}}_t = \mathbf{M} \hat{\mathbf{s}}_{t-1} + \mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (20)$$

przy czym małe litery symbolizują logarytmy zmiennych, a daszki odchylenia od poziomu równowagi długookresowej: $\hat{\mathbf{s}}_t = \ln \mathbf{S}_t - \ln \bar{\mathbf{S}}$. Z równania (10) wynika, że dynamikę cen obligacji można przedstawić jako:

$$P_{f,t} = E_t \left[\beta \frac{MU_{t+1}}{MU_t} \right] = E_t \exp[\ln \beta + mu_{t+1} - mu_t] \quad (21)$$

Ponieważ logarytm krańcowej użyteczności MU_t jest elementem wektora \mathbf{x}_t , na podstawie równania (20) jego dynamikę wyraża się wzorem:

$$mu_{t+1} = mu + \mathbf{M}_{mu} \hat{\mathbf{s}}_t + \mathbf{W}_{mu} \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} = mu + \mathbf{M}_{mu} \mathbf{M} \hat{\mathbf{s}}_{t-1} + \mathbf{M}_{mu} \mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon}_t + \mathbf{W}_{\lambda} \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} \quad (22)$$

⁴Dokładnie, jeżeli $X \sim N(\mu, \sigma)$, wtedy $E[\exp(X)] = \exp(\mu + 0,5\sigma)$.

przy czym wektory \mathbf{M}_{mu} oraz \mathbf{W}_{mu} są odpowiednimi wierszami macierzy \mathbf{M} oraz \mathbf{W} odpowiadającymi dynamice użyteczności krańcowej mu_t . Ponieważ składniki losowe $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ mają rozkłady normalne, więc zmienna losowa po prawej stronie równania (21) ma rozkład logarytmiczno-normalny. Jego wartość oczekiwana jest więc równa:

$$P_{f,t} = \exp[\ln \beta + \mathbf{M}_{mu} (\mathbf{M} - \mathbf{I}) \hat{\mathbf{s}}_{t-1} + (\mathbf{M}_{mu} \mathbf{W} - \mathbf{W}_{mu}) \boldsymbol{\varepsilon}_t + 0,5 \mathbf{W}_{mu} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}'_{mu}] \quad (23)$$

Składnik $0,5 \mathbf{W}_{mu} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}'_{mu}$ reprezentuje wpływ ryzyka makroekonomicznego na ceny obligacji, które jest nieobecne przy linearyzacji równań dynamiki cen obligacji. W podobny sposób można aproksymować dynamikę cen akcji.

3. Wyniki badań porównawczych

W pracy badania porównawcze prowadzone były w odniesieniu do metod perturbacyjnych różnych rzędów oraz aproksymacji logliniowo-lognormalnej. Nie brano pod uwagę metod projekcyjnych oraz wywodzących się z teorii programowania dynamicznego z dwóch powodów. Po pierwsze przy wartościach parametrów przyjętych w pracy rozwiązanie modeli tymi metodami jest bardzo trudne. Przykładowo, nawet skomplikowane procedury oprogramowane w Fortranie dostępne na stronie z programami wykorzystywanymi w podręczniku Heera i Maussnera⁵ [Heer, Maussner, 2008a] nie są w stanie znaleźć rozwiązań układów równań potrzebnych do wyznaczenia wektora parametrów.

Ponadto dla metod tych znane są cząstkowe wyniki porównań charakterystyk omawianego modelu. Sam Jermann [Jermann, 1998] porównywał wyniki uzyskane z podejścia logliniowo-lognormalnego z modelem aproksymowanym jedną z metod projekcyjnych i doszedł do wniosku, że różnice dotyczące przeciętnego poziomu premii akcyjnej oraz stopy wolnej od ryzyka, a także najważniejszych charakterystyk zmiennych makroekonomicznych w obu wersjach są bardzo niewielkie.

Natomiast Grune i Semmler [Grune, Semmler, 2004] rozwiązywali model bardzo zbliżony do modelu analizowanego w pracy stosując metody programowania dynamicznego i pokazali, że cechują się one dużą dokładnością.

W tej pracy rozważano aproksymację logliniowo-lognormalną (ll-ln), metody perturbacyjne 2, 3 i 5 rzędu ze zmiennymi w postaci logarytmów oraz metodę perturbacyjną 2 rzędu ze zmiennymi niezlogarytmowanymi (pert. 2 poz.). Wartości parametrów przedstawia tablica 1. Zostały one ustalone na takim poziomie, aby model jak najlepiej odwzorowywał przeciętny poziom stopy wolnej od ryzyka oraz premii za ryzyko oraz zmienność konsumpcji oraz inwestycji w stosunku do zmienności produkcji globalnej.

W tablicy 2 zestawiono charakterystyki najważniejszych zmiennych finansowych modelu uzyskane przy różnych metodach aproksymacji. Oprócz stopy zwrotu z akcji R oraz stopy wolnej od ryzyka R_f analizowano także oczekiwaną premię akcyjną $EEP = E_t(R_{t+1}) - R_f$, stopę wzrostu dywidend ΔD oraz wskaźnik dywidenda/cena akcji DP . Ponadto rozważano wartości oczekiwane E , odchy-

⁵ <http://www.wiwi.uni-augsburg.de/vwl/maussner/dgebook/download3.htm>

lenia standardowe D oraz współczynniki autokorelacji AR zmiennych. Oprócz wyników uzyskanych na podstawie symulacji, tam gdzie było to możliwe podano charakterystyki wyznaczone analitycznie.

Tablica 1. Wartości parametrów modelu

Parametr	β	χ	ν	γ	α	δ	ξ	ρ	σ
Wartość	0,993	0,85	5	1,005	0,36	0,013 6	0,358	0,99	0,013

ξ oznacza parametr regulujący krzywiznę funkcji inwestycji Φ .

Źródło: Opracowanie własne.

Tablica 2. Wyniki badań charakterystyk zmiennych finansowych

Zmienna	Moment	Metoda				
		ll-ln	pert. 2 poz.	pert. 2	pert. 3	pert. 5
R	E	7,11 [7,15]	16,14 [6,98]	7,01 [6,96]	7,02	7,02
	D	21,87 [23,03]	39,38 [21,81]	21,63 [21,32]	21,69	21,70
	AR	-0,28	0,13	-0,28	-0,28	-0,28
R_f	E	0,95 [1,06]	1,61 [0,80]	1,19 [0,81]	1,24	1,21
	D	11,05 [13,54]	11,42 [11,65]	10,99 [11,49]	10,96	10,97
	AR	0,47	0,49	0,47	0,47	0,47
EEP	D	0,12	0	0	0,17	0,17
ΔD	E	2,32	2,43	2,34	2,38	2,39
	D	7,88	9,06	8,13	8,57	8,63
	AR	-0,16	-0,15	-0,15	-0,16	-0,16
DP	E	2,78	2,65	2,71	2,71	2,70
	D	0,76	0,66	0,74	0,75	0,75
	AR	0,49	0,46	0,48	0,49	0,49

W tablicy zestawiono średnie wartości uzyskane na podstawie symulacji 5000 szeregów czasowych składających się z 240 obserwacji. Wszystkie wartości, poza oczekiwaną premią akcyjną EEP , podane są dla wielkości rocznych. Tam gdzie to było możliwe, w nawiasach kwadratowych, podano również charakterystyki wyznaczone analitycznie.

Źródło: Opracowanie własne.

Analizując przedstawione wyniki można wysnuć dwa główne wnioski. Po pierwsze wyniki symulacyjne uzyskane dla zmiennych niezlogarytmowanych przy badaniu stopy zwrotu z akcji i stopy wolnej od ryzyka dość znacząco odbiegają od innych rezultatów. Na przykład średnia stopa zwrotu z akcji równa jest 16,14%, a dla pozostałych metod jest to około 7%. Jednocześnie taka sytuacja nie dotyczy wyników analitycznych. Wyniki te wskazują, że w przypadku omawianego modelu stosowanie symulacji na zmiennych niezlogarytmowanych generuje duże błędy.

Po drugie nie licząc wspomnianej wyżej sytuacji dla większości badanych charakterystyk różnice pomiędzy metodami są bardzo niewielkie. Dość wyraźne różnice widoczne są jedynie dla stopy wolnej od ryzyka (średni poziom 0,95% dla aproksymacji logliniowo-lognormalnej oraz 1,24% dla perturbacji 3 rzędu) oraz dla oczekiwanej premii akcyjnej. W rozwinięciach 2 rzędu jej odchylenie standardowe wynosi 0, natomiast dla innych podejść jest to 0,12-0,17%. W rzeczywistości, choć nieobserwowalna bezpośrednio, premia akcyjna cechuje się dość dużą zmiennością. Stosowanie więc metod aproksymacji 2 rzędu do badań związanych z oczekiwaną premią akcyjną nie jest wskazane. Wada ta nie dotyczy jednak aproksymacji logliniowo-lognormalnej.

Badaniu poddano również korelacje pomiędzy stopą wzrostu globalnej produkcji a stopą zwrotu z akcji i stopą wolną od ryzyka uwzględniając dodatkowo możliwe przesunięcia czasowe. Wyniki były do siebie bardzo podobne niezależnie od zastosowanej metody aproksymacji. Różnice w wartościach współczynników korelacji nie były większe niż 0,11 biorąc pod uwagę zmienne niezlogarytmowane i zaledwie 0,01 dla pozostałych metod. Analogiczne rezultaty uzyskano dla analizy prognozowalności premii akcyjnej przez wskaźnik dywidenda/cena akcji. Z uwagi na ograniczenia redakcyjne wyników tych nie zamieszczano w pracy. Są one dostępne na życzenie u autora [zob. także Ace-dański, 2010].

Tablica 3 zawiera natomiast wyniki badania charakterystyk zmiennych makroekonomicznych. Łatwo zauważyć, że wyniki praktycznie nie różnią się, nawet biorąc pod uwagę aproksymację przy zmiennych niezlogarytmowanych. Pewne różnice występują praktycznie jedynie pomiędzy oszacowaniami stosunku średniego poziomu konsumpcji i inwestycji obliczonymi na podstawie symulacji i uzyskanymi analitycznie. Na przykład w przypadku linearyzacji modelu (metoda logliniowo-lognormalna) średni stosunek \bar{C}/\bar{I} dla symulacji wynosi 2,42 a analitycznie równy jest 2,91.

Tablica 3. Wyniki badań charakterystyk zmiennych makroekonomicznych

Charakt.	Metoda				
	ll-ln	pert. 2 poz.	pert. 2	pert. 3	pert. 5
$D(C)/D(Y)$	0,62 [0,63]	0,63	0,62 [0,62]	0,61	0,61
$D(I)/D(Y)$	2,82 [2,81]	2,72	2,79 [2,80]	2,80	2,80
\bar{C}/\bar{I}	2,42 [2,91]	2,33	2,30 [2,76]	2,28	2,28
$AR(Y)$	0,72 [0,73]	0,72	0,72 [0,73]	0,72	0,72
$AR(C)$	0,93 [0,94]	0,93	0,93 [0,94]	0,93	0,93
$AR(I)$	0,60 [0,61]	0,60	0,60 [0,61]	0,60	0,60
$cor(C_t, Y_t)$	0,75 [0,76]	0,75	0,75 [0,76]	0,75	0,75
$cor(I_t, Y_t)$	0,91 [0,91]	0,91	0,91 [0,91]	0,91	0,91

W tablicy zestawiono średnie wartości uzyskane na podstawie symulacji 5000 szeregów czasowych składających się z 240 obserwacji. Wszystkie wyniki podane są dla wielkości kwartalnych wyodrębnionych przy pomocy filtru

Hodricka-Prescotta. W nawiasach kwadratowych zawarte są wyniki analityczne.

Źródło: Opracowanie własne.

Zakończenie

Przedstawione w pracy wyniki wskazują, że w większości przypadków pomiędzy analizowanymi podejściami nie występują istotne różnice. To znaczy, że wnioski wyciągane na podstawie modeli dotyczące zachowania się cen akcji i stopy wolnej od ryzyka, a także zmiennych makroekonomicznych będą takie same. W takim kontekście stosowanie skomplikowanych metod aproksymacji modeli, takich jak rozwinięcia wysokich rzędów, czy podejścia projekcyjne, nie jest konieczne. Modele aproksymowane podejściami prostszymi i zazwyczaj szybszymi, jak na przykład aproksymacja logliniowo-lognormalna, co do wniosków nie będą się różnić. Należy jednak mieć na uwadze, że w niektórych sytuacjach, przykładowo przy badaniach nad oczekiwaną premią akcyjną, nie wszystkie podejścia są wystarczająco dokładne. Ponadto przy analizie modelu Jermanna wskazane jest posługiwanie się logarytmami zmiennych. Eliminuje to ryzyko pojawienia się błędów numerycznych podczas symulacji modelu.

Literatura

1. Acedański J., (2009), Metody rozwiązywania stochastycznych, dynamicznych modeli równowagi ogólnej, w Pociecha J., (red.), Współczesne problemy statystyki, ekonometrii i matematyki, *Studia i Prace UE w Krakowie* nr 3, s. 7-19.
2. Acedański J., (2010), Ceny aktywów giełdowych a wielkości makroekonomiczne w dynamiczno-stochastycznych modelach równowagi ogólnej, praca doktorska, UE Katowice.
3. Arouba S., Fernandez-Villaverde J., Rubio-Ramirez J., (2006), Comparing solution methods for dynamic equilibrium economies, "Journal of Economic Dynamics and Control" vol. 30(12), s. 2477-2508.
4. Bernanke B., Gertler M., (2000), Monetary policy and asset price volatility, NBER Working Paper 7559.
5. Grabek G., Kłos B., Koloch G., (2010), SOE PL 2009 – Model DSGE małej otwartej gospodarki estymowany na polskich danych, „Materiały i Studia” nr 251, NBP.
6. Grune L., Semmler W., (2007), Asset pricing with dynamic programming, „Computational Economics” vol. 29(3), s. 233-265.
7. Heer B., Maussner A., (2008a), Dynamic general equilibrium modeling. 2nd edition, Springer, Berlin.
8. Heer B., Maussner A., (2008b), Computation of business cycle models: A comparison of numerical methods, "Macroeconomic Dynamics" vol. 12(5), s. 641-663.
9. Jermann U., (1998), Asset pricing in production economies, „Journal of Monetary Economics” vol. 41(2), s. 257-275.

10. Kowal P., (2007), Higher order approximations of stochastic rational expectations models, MPRA Paper No. 3913.
11. Ljungqvist L., Sargent T., (2004), Recursive macroeconomic theory, MIT Press, Cambridge.
12. Miranda M., Fackler P., (2002), Applied computational economics and finance, MIT Press, Cambridge.

Streszczenie

Obecnie jedną z najszybciej rozwijających się gałęzi modelowania makroekonomicznego są dynamiczne, stochastyczne modele równowagi ogólnej. Ponieważ równania tych modeli wyprowadzane są z mikroekonomicznych podstaw optymalnego zachowania się podmiotów modelu, tworzą one skomplikowany układ stochastycznych, nieliniowych równań różnicowych. Sprowadzenie takiego modelu do postaci zredukowanej wymaga jego aproksymacji. W pracy przebadano, czy występują różnice w podstawowych charakterystykach stóp zwrotu z akcji i stopy wolnej od ryzyka przy stosowaniu różnych metod aproksymacji rozwiązań modeli DSGE. Narzędziem badawczym był model opracowany przez Jermanna. Analizowano przede wszystkim metody perturbacyjne oraz aproksymację logliniowo-lognormalną. Wyniki badań wskazują, że w przypadku większości charakterystyk, a także dynamicznych powiązań pomiędzy zmiennymi finansowymi a sferą realną oraz przy prognozowalności premii akcyjnej zastosowanie różnych metod daje bardzo podobne wyniki. Jedyne w odniesieniu do oczekiwanej premii akcyjnej stwierdzono istotne różnice pomiędzy badanymi metodami. Zauważono również, że stosowanie zmiennych niezlogarytmowanych przy symulacjach modeli aproksymowanych metodami perturbacyjnymi może prowadzić do błędów numerycznych.

Asset prices approximation in contemporary macroeconomic models (Summary)

The paper investigates differences between asset prices properties of DSGE models approximated using various approaches. It uses Jermann's model and focuses mainly on perturbation techniques and loglinear-lognormal approximation. The results show that for a wide range of stock and risk-free rate characteristics there are almost no differences between the methods. Expected stock premium is the notable exception here.